



## MATEMATIKA BSC ZÁRÓVIZSGA TEMATIKA PTE TTK, Matematikai és Informatikai Intézet

### 1. Matematikai alapok I.

Halmazelméleti és logikai alapfogalmak: halmazok, kijelentések, műveletek, ezek tulajdonságai. Halmazok számossága. Predikátumok, kvantorok. Következtetési sémák, következtetések helyességének eldöntése. Relációk, ekvivalenciarelációk, kapcsolat a halmazok osztályozásaival, rendezési relációk. Függvények, injektív, szürjektív, bijektív függvények és ezek jellemzése. Függvények kompozíciója és inverze.

### 2. Számelmélet I.

Oszthatóság, legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös az egész számok gyűrűjében. Euklideszi osztás és algoritmus. Prímszámok, a számelmélet alaptétele.

### 3. Számelmélet II.

Kongruenciák és maradékosztályok. Az Euler, Fermat és Wilson tételek. Lineáris és kongruenciák. Lineáris diofantoszi egyenletek. Számelméleti függvények.

### 4. Lineáris algebra

A test feletti vektortér fogalma, altér, lineáris függetlenség és függőség, generátorrendszer, bázis, dimenzió. Mátrixok, mátrixműveletek. Determinánsok és tulajdonságaik. Lineáris egyenletrendszerek. Cramer-szabály. Lineáris leképezések.

### 5. Algebrai struktúrák I.

Félcsoportok és csoportok. Részcsoportok, csoportmorfizmusok. Mellékosztályok, Lagrange-tétele, homomorfizmustétel. Permutációcsoportok.

### 6. Algebrai struktúrák II.

Gyűrűk és testek. Részgyűrűk, résztestek, morfizmusok, karakterisztika. Ideálok. Polinomgyűrűk, a maradékos osztás tétele, irreducibilis polinomok. Az algebra alaptétele. Valós és komplex együtthatós polinomok és egyenletek.

### 7. Numerikus sorozatok és sorok

Sorozatok: korlátosság, monotonitás, konvergencia és ezek kapcsolatára vonatkozó tételek. Sorok: konvergencia, abszolút konvergencia és ezek kapcsolata. Pozitív tagú sorok, Leibniz-típusú sorok. Konvergencia kritériumok. Nevezetes sorozatok és sorok. Sorok Cauchy szorzata. Cauchy szorzat konvergenciájára vonatkozó tételek.

## 8. Hatványsorok, függvények határértéke, folytonossága

Hatványsorok konvergencia tartománya és összegfüggvénye. Az összegfüggvény folytonosságára, differenciálhatóságára és integrálhatóságára vonatkozó tételek. Elemi függvények definíciója: az  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$  függvények és tulajdonságai. A valós leszűkítések grafikus képei és tulajdonságai.

Valós változós valós értékű függvények határértéke. Átviteli elv. Két függvény összegfüggvényének, szorzatának, hányadosának és összetettjének határértéke. Nevezetes határértékek. Határérték-számítási eljárások. Folytonos függvények és tulajdonságai.

## 9. Differenciálszámítás

Valós változós valós értékű függvények differenciálhatósága: differenciálhányados, differenciál, geometriai jelentés. A differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata. Összeg, szorzat, hányados, összetett és inverz függvény differenciálhatósága. A L'Hospital szabály. Monotonitás, szélsőérték, konvexitás vizsgálata deriváltak segítségével. Függvényvizsgálat.

## 10. Integrálszámítás I, differenciálegyenletek

Primitív függvények. Primitív függvények műveleti tulajdonságai. Primitív függvénnyel rendelkező függvényosztályok. Parciális integrálás. Integrálás helyettesítéssel. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása.

## 11. Integrálszámítás II., alkalmazások, geometriai vonatkozások

A határozott integrál fogalma. Integrálható függvényosztályok, integrálfüggvény. Newton-Leibniz tétel. Síkidomok területének, görbe ívhosszának, forgástestek térfogatának és felszínének számítása integrál segítségével. Elemi geometriai terület, kerület, térfogat és felszín fogalom.

## 12. Többváltozós függvények.

Többváltozós függvények határértéke és differenciálhatósága. Derivált mátrix. Parciális deriváltak, iránymenti derivált A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei. Többváltozós valósértékű függvények szélsőértékének meghatározása. Vonalintegrál. Definíció, úttól való függetlenség. Többszörös integrál definíciója és kiszámítása.

## 13. Elemi sík- és térgeometria, szerkesztések

Tételek, kölcsönös helyzetük, távolságuk, szögük. Háromszögek, négyszögek, sokszögek, poliéderek, konvex alakzatok geometriája. Euklideszi szerkesztés. Nevezetes szerkesztési feladatok.

## 14. Geometriai transzformációk

Egybevágósági, hasonlósági, affin és projektív transzformációk. Tulajdonságok. Invariáns elemek. Transzformáció csoportok. Inverzió és alkalmazásai.

## 15. Geometria alapjai

Az euklideszi geometria axiómatikus felépítésének vázlata. Párhuzamossági axióma. A gömbi geometria elemei. Gömbi trigonometria. Valós projektív geometria elemei. Homogén koordináták, kettősviszony. Projektivitások. Kollineációk. Desargues tétel, Papposz tétel. Másodrendű görbék. Pascal és Brianchon tétel.

**16. Analitikus geometria, görbék differenciálgeometriája**

Geometriai vektor, vektorműveletek, koordináták. Skaláris és vektoriális szorzás geometriai alkalmazásai, helyzetgeometriai és metrikus feladatok. Alakzatok egyenlete (egyenes, kör, kúpszeletek). Kör geometriája. Görbék paraméteres előállításai. Alapvető görbeelméleti fogalmak. Frenet-formulák.

**17. Kombinatorika**

Permutációk, variációk, kombinációk (ismétlés nélkül és ismétléssel). Binomiális együtthatók és tulajdonságaik. A binomiális tétel, szitaformula. Fibonacci-számok, Catalan-számok. Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Euler-vonal, Hamilton-kör.

**18. Valószínűségszámítás**

Kombinatorikus valószínűségi feladatok. Az eseményalgebra fogalma, tulajdonságok. Gyakoriság, relatív gyakoriság, a valószínűség fogalma. Klasszikus valószínűségi mező. Geometriai valószínűség. Feltételes valószínűség. Valószínűségi változó, várható érték, szórás. Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások.

**19. Számelmélet III. (csak a szakirány nélküli hallgatóknak)**

Magasabbfokú és másodfokú kongruenciák. Legendre-szimbólum, primitív gyök, diszkrét logaritmus. A  $\pi(x)$  függvényre és az  $n$ -edik prímszámra vonatkozó becslések. A prímek reciprokainak összege.

**20. Komplex függvénytan (csak a szakirány nélküli hallgatóknak)**

Holomorf függvények. Cauchy-Riemann feltételek. Komplex integrál. Cauchy-féle integrálformulák. Holomorf függvények hatványsorba fejte. Laurent sorok.

**21. Valós függvénytan (csak a szakirány nélküli hallgatóknak)**

Lebesgue integrál bevezetése. Lebesgue-tétel.  $L^2$  függvénytér, skaláris szorzat. Trigonometrikus rendszer. Trigonometrikus Fourier-sor. Dirichlet-féle magfüggvény. Dini-féle konvergencia-kritérium. Fejér tétele.

**22. Operációkutatás (csak a szakirány nélküli hallgatóknak)**

Lineáris programozási feladat. Szimplex algoritmus. Dualitás. Dualitási tételek. Szállítási feladat.